



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Neutrale huller

Rathkjen, Arne

Publication date:
1995

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):
Rathkjen, A. (1995). *Neutrale huller*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. R / Institut for Bygningsteknik Bind R9525

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

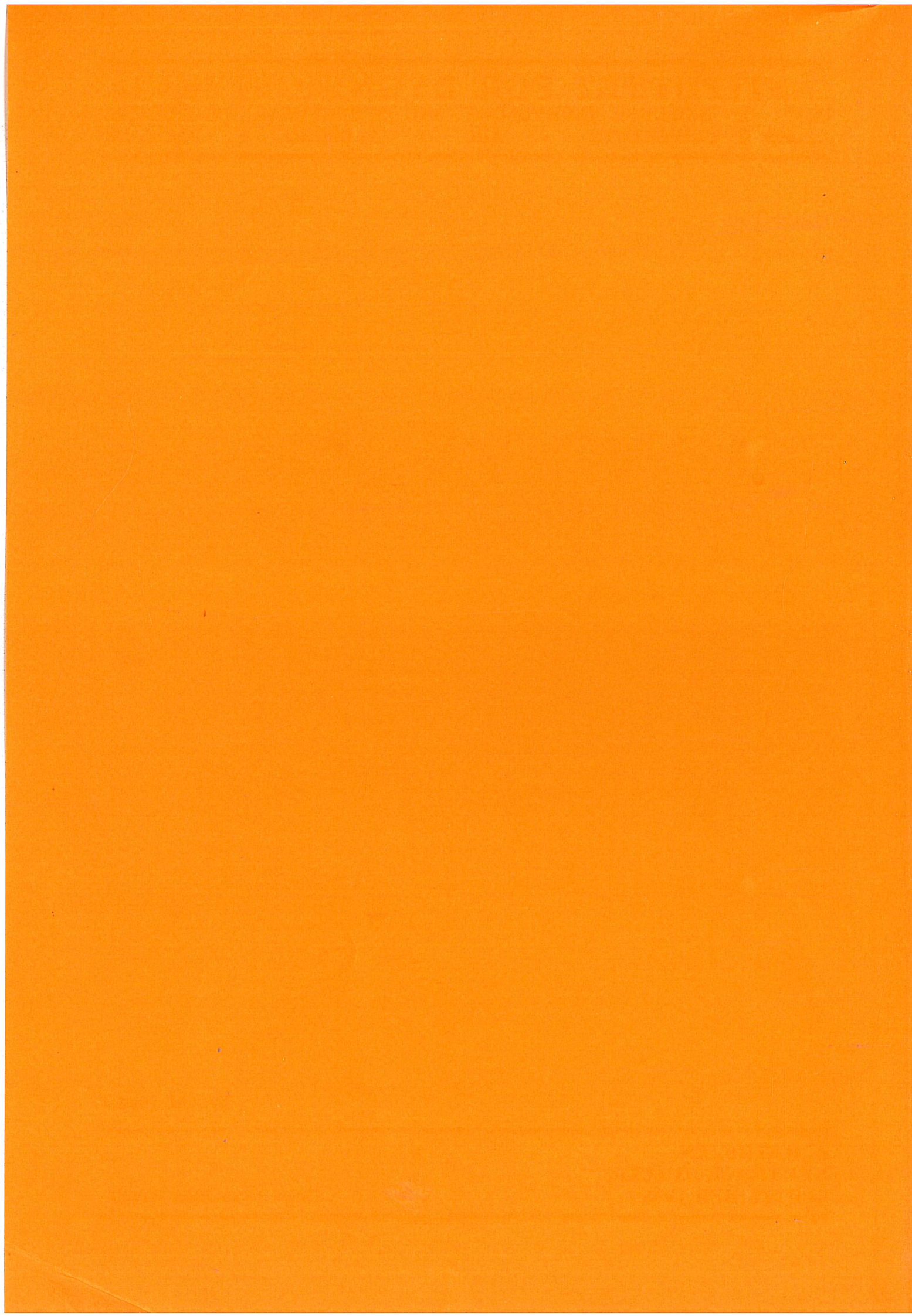
INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING
AALBORG UNIVERSITET • AUC • AALBORG • DANMARK

TEAM 1995.1

A. RATHKJEN
NEUTRALE HULLER
SEPTEMBER 1995

ISSN 1395-7953 R9525



INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING
AALBORG UNIVERSITET • AUC • AALBORG • DANMARK

TEAM 1995.1

A. RATHKJEN
NEUTRALE HULLER
SEPTEMBER 1995

ISSN 1395-7953 R9525

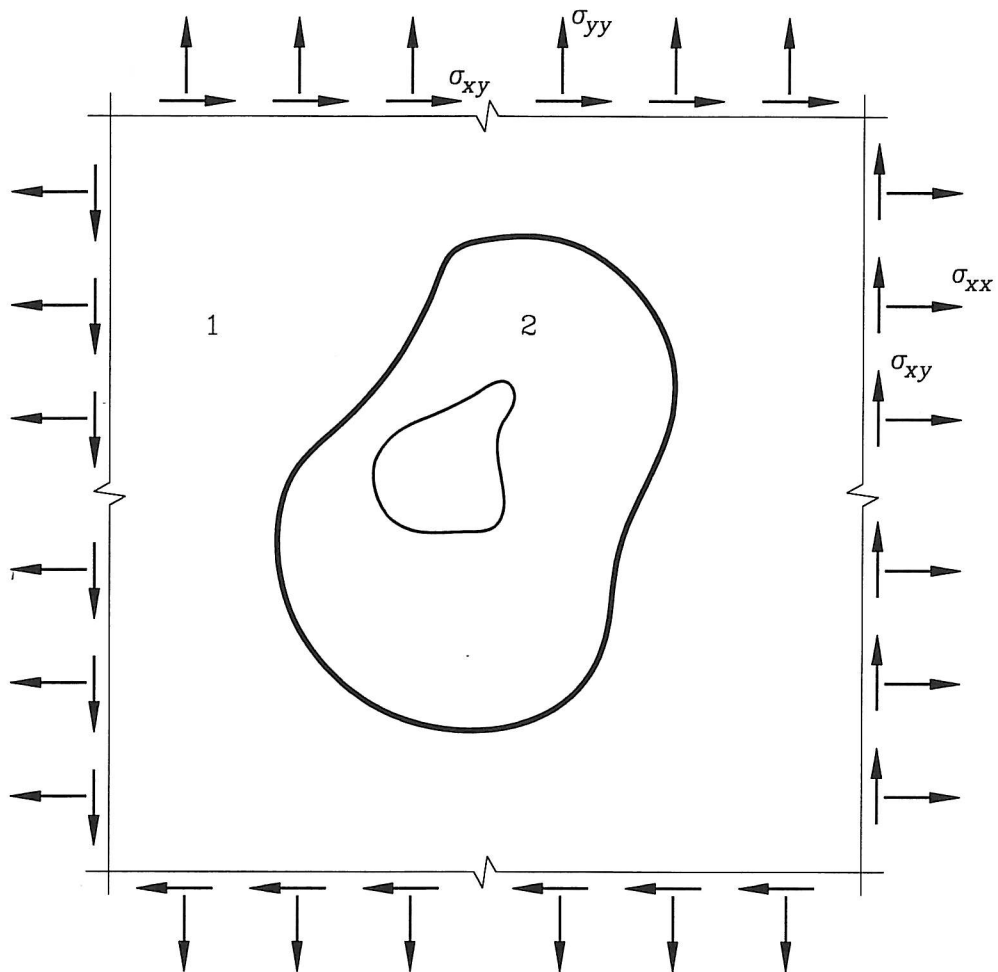
NEUTRALE HULLER

Indledning

Betegnelsen neutrale huller benyttes af Mansfield (1953) om visse armerede huller, som har den egenskab, at de ikke ændrer den spændingstilstand, der for en given last er i konstruktionselementet uden hul. Ifølge Gurney (1938) beskæftigede Cox sig med samme problemstilling i 1935. Hvis der altid skal anbringes armering langs hulranden samt eventuelt supplerende armering i hullet og/eller i skiven udenfor hullet, da viser det sig, at kun ganske bestemte hulformer kan gøres neutrale for en given belastning. Hvis man derimod placerer armeringen udenfor hullet, så den er omgivet af skivematerialet på begge sider, er det imidlertid muligt at bestemme en armeringsføring, som for en vilkårlig hulform gør hullet neutralt for en given belastning.

Teoretiske overvejelser

Figur 1 viser en belastet skive med et hul og en armering, der omslutter hullet, og som betragtes som en plankrum bjælke. Området udenfor armeringen betegnes område 1, og området mellem hullet og armeringen betegnes område 2.



Figur 1

og området mellem hullet og armeringen betegnes område 2. Snitkræfterne i bjælken: H , V og M , er vist i figur 2 sammen med det x, y -system, der benyttes. Som udledt i appendiks A bestemmes snitkræfterne af

$$H = \partial U / \partial y$$

$$V = -\partial U / \partial x$$

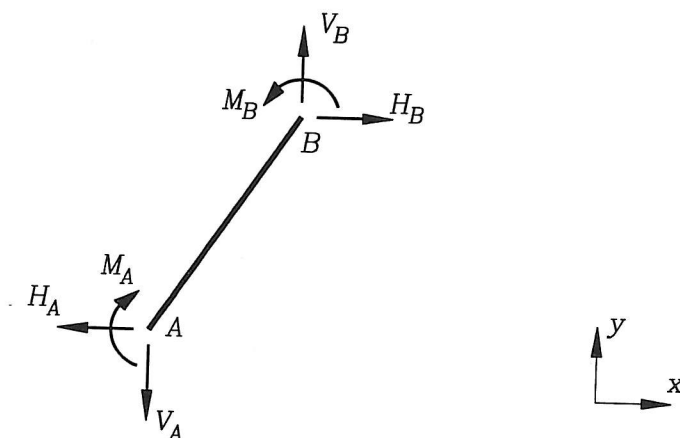
$$M = U$$

(1)

hvor

$$U = U_1 - U_2 + Ax + By + C \quad (2)$$

I (2) er U_1 og U_2 spændingsfunktioner, som bestemmer spændingerne σ_{xx} , σ_{xy} og σ_{yy} i områderne 1 og 2, mens A , B og C er konstanter, som benyttes til at fastlægge placeringen af armeringen.



Figur 2

Beregningerne simplificeres væsentligt, når man vælger at benytte en armering uden bøjningsstivhed, idet armeringsføringen da bestemmes umiddelbart af ligning (1c), som med $M = 0$ bliver

$$U = 0 \quad (3)$$

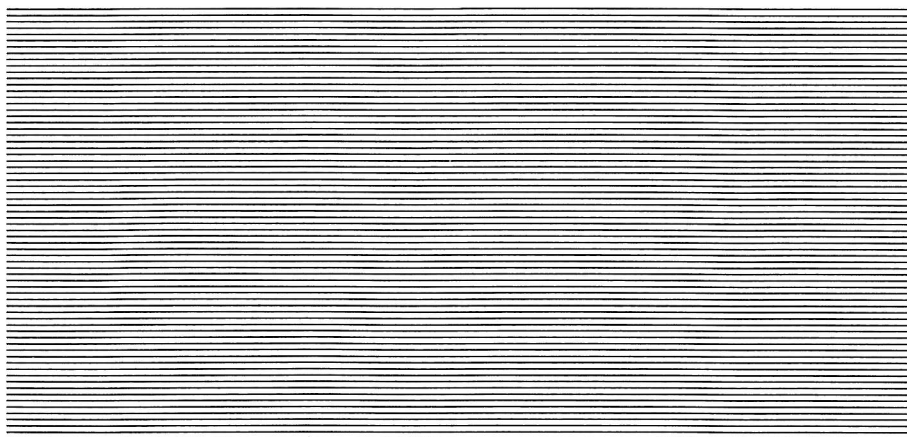
Armeringen kaldes i dette tilfælde en *stringer*, og den eneste snitkraft bliver *stringerkraften* S i stringerens retning, bestemt ved

$$S^2 = H^2 + V^2 \quad (4)$$

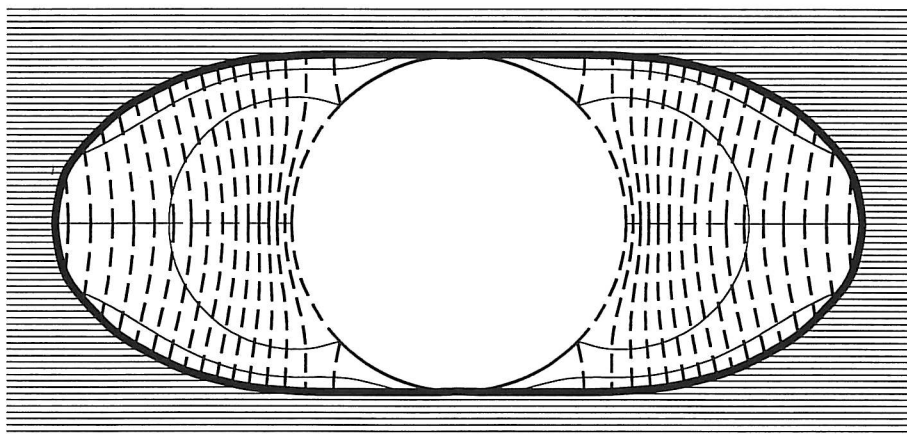
Mens spændingstilstanden udenfor stringeren skal være den samme som i skiven uden hul, er der en vis valgfrihed, når det drejer sig om spændingstilstanden i området mellem hullet og stringeren. Man kan vælge en vilkårlig spændingstilstand som tilfredsstiller randbetingelserne langs hullets omkreds, der sker blot det, at forskellige valg af spændingstilstand medfører forskellige placeringer af stringer.

Som et eksempel undersøges en plan trækstang med et cirkulært hul med radius a . Udenfor stringeren er spændingstilstanden enakset træk p , og mellem hul og stringer er der valgt en spændingstilstand, der langt fra hullet er et træk i samme retning som det enaksede træk og et lige så stort tryk vinkelret på denne retning. Størrelsen af disse spændinger er valgt til $p/4$, så den maksimale trækspænding mellem hul og stringer er lig med det enaksede træk udenfor stringeren. Spændingsfunktioner hørende til disse tilstande er angivet i appendiks B.

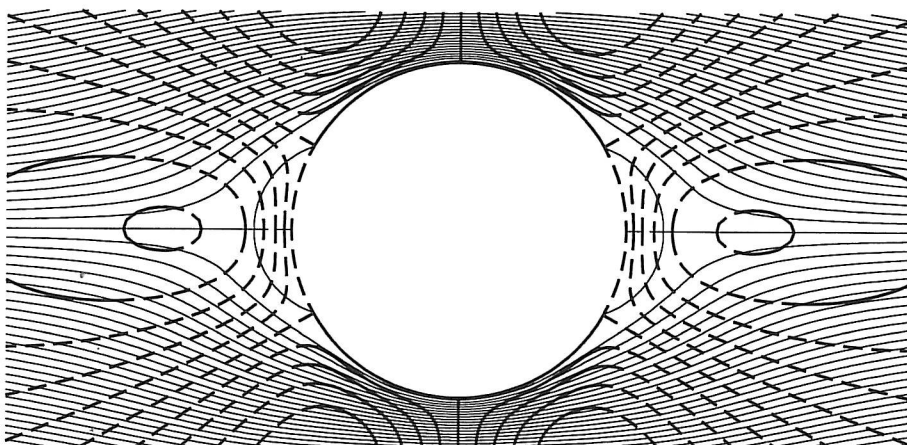
a)



b)



c)

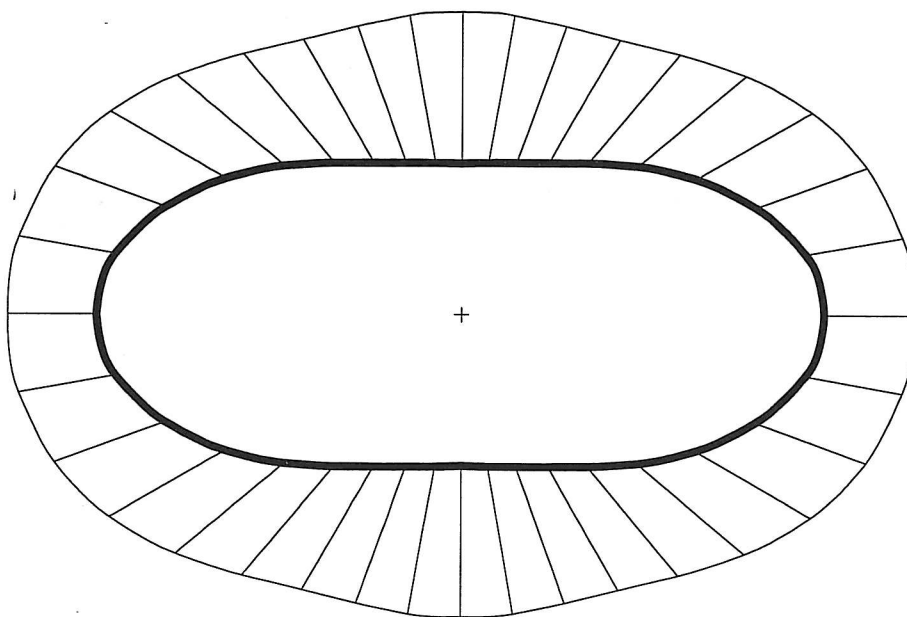


Figur 3



Virkningen af en stringer er vist i figur 3 ved hjælp af kraftlinier, se Rathkjen (1994). Figur 3a viser kraftlinierne i en uforstyrret trækstang, figur 3b viser kraftlinierne i en trækstang med hul og stringer og endelig viser figur 3c kraftlinierne i en trækstang med hul men uden armering. Det fremgår tydeligt, at spændingskoncentrationen i figur 3c er fjernet effektivt.

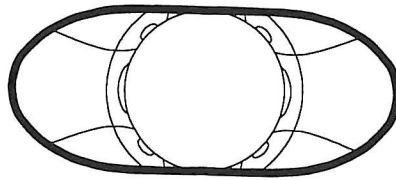
Stringerkraftens variation langs stringeren er vist i figur 4. Den største trækraft er $S_{\max} = pta$ og den mindste kraft, som også er en trækraft, er $S_{\min} = 0,6 pta$, hvor t er skivetykkelsen. Mellemliggende værdier af S er angivet i tabel B.1 i appendiks B.



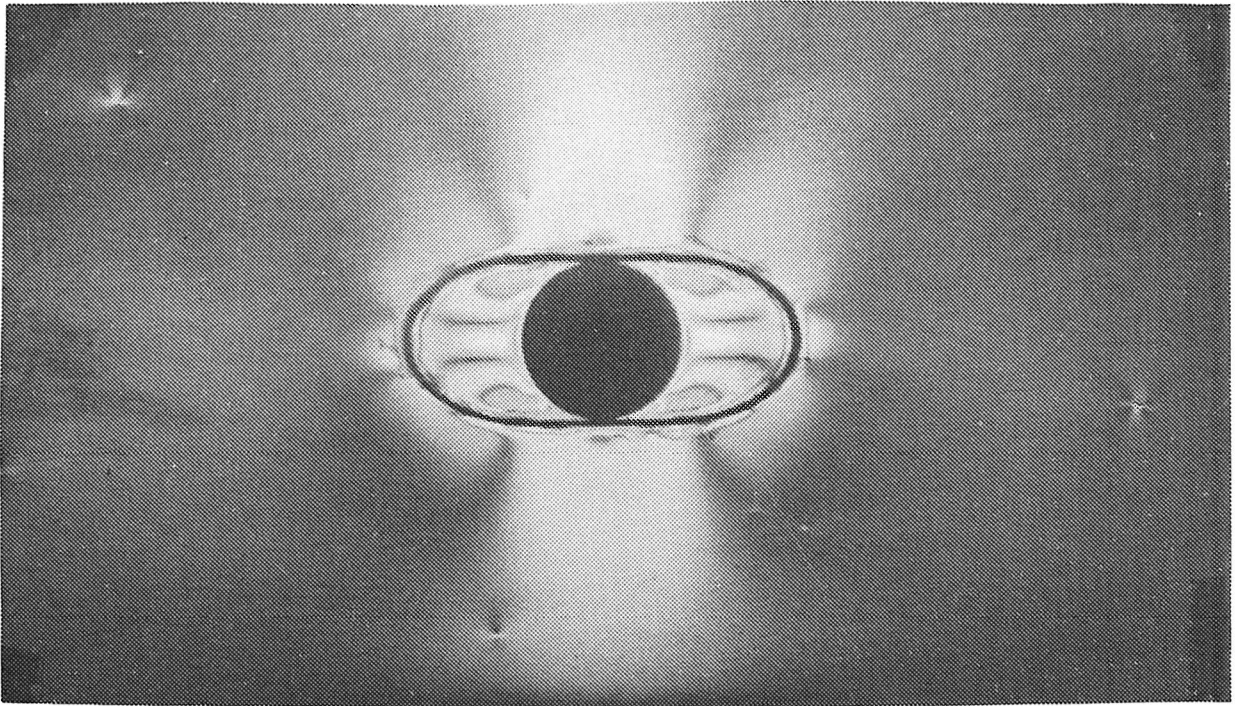
Figur 4

6

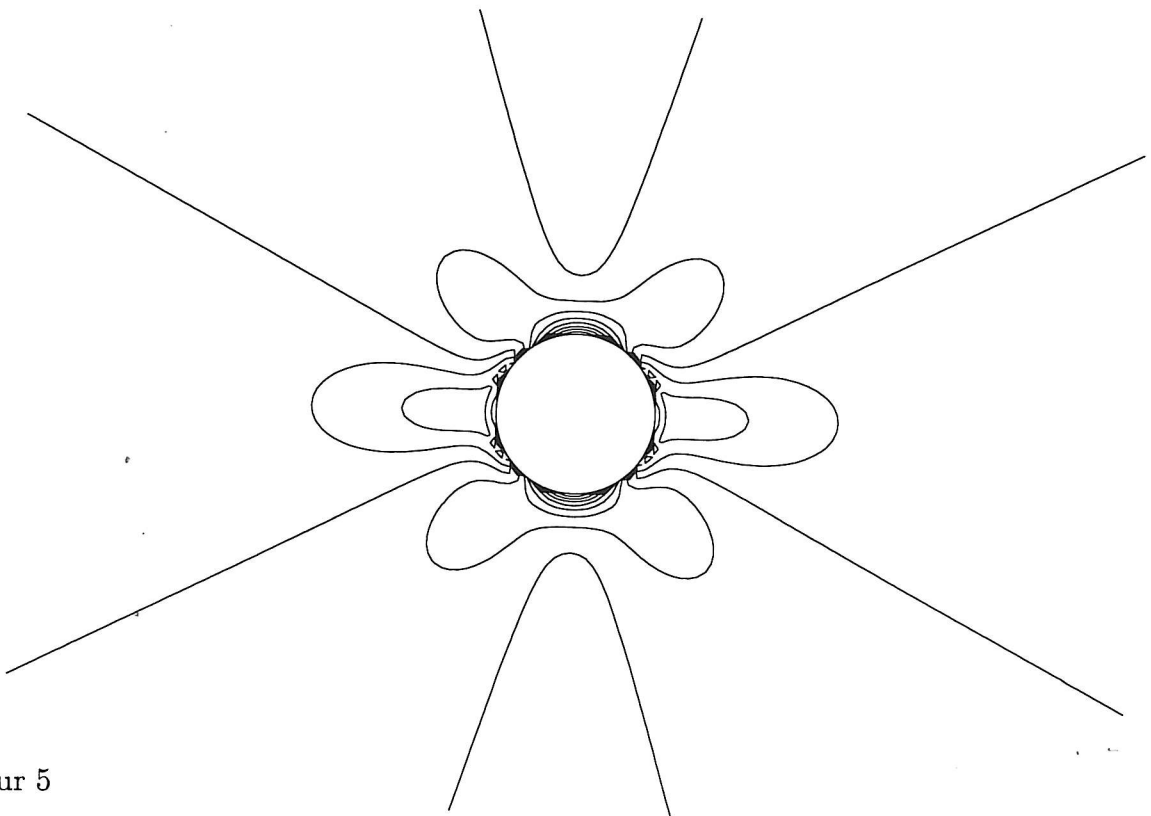
a)



b)



c)



Figur 5

Eksperimentel undersøgelse

I foranstående er der udelukkende taget hensyn til ligevægtsligningerne, selvom forekomsten af spændinger, snitkræfter og momenter altid er ledsaget af tøjninger, hvorfor stringerkraften medfører længdetøjninger i stringeren. Der er yderligere set bort fra, at det af praktiske grunde kan være nødvendigt at benytte en stringer, som har en vis bøjningsstivhed. Der kan være tale om problemer med at fremstille en stringer uden bøjningsstivhed, eller det kan af hensyn til placeringen og fastholdelsen af stringeren i forhold til hullet og skiven ligefrem være ønskværdigt med en vis bøjningsstivhed.

Den indflydelse, som tilstedeværelsen af tøjninger og bøjningsstivhed har på den tilstræbte spændingsfordeling, er undersøgt ved hjælp af en spændingsoptisk model. Modellen er fremstillet af en 10 mm tyk aralditplade; hullet har en diameter på 20 mm og armeringen er et stålband med dimensionerne $0,4 \times 5 \text{ mm}^2$. Figur 5 viser nogle isokromatbilleder. For en trækstang med hul og armering er de teoretiske og de eksperimentelt bestemte isokromater, vist i figur 5a henholdsvis figur 5b. Til sammenligning er isokromaterne i en trækstang med hul, men uden armering, vist i figur 5c.

Desværre ligner isokromatforløbet i figur 5a forløbet i figur 5c så meget, at det ikke er muligt at sige noget definitivt om, hvorvidt det eksperimentelt fundne isokromatbillede i figur 5b bedst ligner det ene eller det andet. Det fremgår imidlertid helt klart af figur 5b, at spændingskoncentrationen i den uarmerede trækstang er fjernet og, at spændingstilstanden inden for stringeren er væsentlig forskellig fra spændingstilstanden uden for.

Referencer

Gurney, C (1938): *An analysis of the Stresses in a Flat Plate with a Reinforced Circular Hole under Edge Forces.*

Aeronautical Research Committee, Reports and Memoranda No. 1834, 1-25.

Mansfield, E H (1953): *Neutral Holes in a Plane Sheet - Reinforced Holes which are Elastically Equivalent to the Uncut Sheet.*

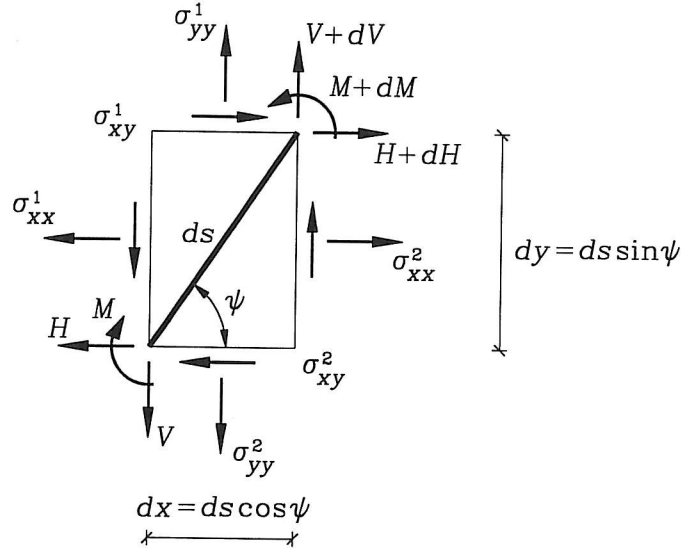
Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol VI, 370-378.

Rathkjen, A (1994): *Force Lines in Plane Stress.*

Instituttet for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. R9420, 1-13.

Appendiks A

Figur A1 viser et stykke af en plankrumbjælke der, som vist i figur 1, adskiller områderne 1 og 2 med spændingerne $\sigma_{xx}^1, \sigma_{xy}^1, \sigma_{yy}^1$ henholdsvis $\sigma_{xx}^2, \sigma_{xy}^2$ og σ_{yy}^2 . Ligevægtslig-



Figur A1

ningerne giver

$$\begin{aligned} dH &= \left((\sigma_{xx}^1 - \sigma_{xx}^2) dy - (\sigma_{xy}^1 - \sigma_{xy}^2) dx \right) t \\ dV &= \left(-(\sigma_{yy}^1 - \sigma_{yy}^2) dx + (\sigma_{xy}^1 - \sigma_{xy}^2) dy \right) t \\ dM &= H dy - V dx \end{aligned} \quad (A1)$$

og med spændingsfunktionerne U_1 og U_2 fås

$$\begin{aligned} dH &= \left(dy \frac{\partial^2}{\partial y^2} (U_1 - U_2) + dx \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (U_1 - U_2) \right) t = d \frac{\partial}{\partial y} (U_1 - U_2) t \\ dV &= \left(-dx \frac{\partial^2}{\partial x^2} (U_1 - U_2) - dy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (U_1 - U_2) \right) t = -d \frac{\partial}{\partial x} (U_1 - U_2) t \end{aligned} \quad (A2)$$

og hermed

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial}{\partial y} (U_1 - U_2) t + B \\ V &= -\frac{\partial}{\partial x} (U_1 - U_2) t - A \end{aligned} \quad (A3)$$

samt

$$M = (U_1 - U_2)t + Ax + By + C \quad (A4)$$

Sættes

$$U = (U_1 - U_2)t + Ax + By + C \quad (A5)$$

har man

$$H = \partial U / \partial y$$

$$V = -\partial U / \partial x \quad (A6)$$

$$M = U$$

Appendiks B

Spændingsfunktionerne er i det følgende angivet i polære r, θ -koordinater, hvis sammenhæng med de cartesiske x, y -koordinater er

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \\ r^2 &= x^2 + y^2, \quad \tan \theta = y/x \end{aligned} \tag{B1}$$

I områderne 1 og 2 er spændingsfunktionerne

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} p a^2 \rho^2 \sin^2 \theta \\ U_2 &= -\frac{1}{8} p a^2 (\rho - \rho^{-1})^2 \cos 2\theta \end{aligned} \tag{B2}$$

hvor p er det enaksede træk, hullets radius er a og $\rho = r/a$.

Med konstanterne i (2)

$$A = B = 0 \quad \text{og} \quad C = -p a^2 / 2 \tag{B3}$$

går stringeren gennem $(\rho, \theta) = (1, \pi/2)$, og man har $d\rho/d\theta = 0$ for $\theta = 0$ og $\theta = \pi/2$. Hermed bliver ligningen for stringeren

$$U = \frac{1}{8} p a^2 \left(4\rho^2 \sin^2 \theta + (\rho - \rho^{-1})^2 \cos 2\theta - 4 \right) = 0 \tag{B4}$$

Koordinaterne til nogle punkter på stringeren er, sammen med stringerkraften S i disse punkter, anført i tabel B1.

θ	ρ	S/pta
0°	2,41	0,59
10°	2,32	0,65
20°	2,08	0,78
30°	1,80	0,88
40°	1,53	0,93
50°	1,31	0,94
60°	1,16	0,94
70°	1,07	0,96
80°	1,02	0,99
90°	1,00	1,00

Tabel B1

